

Franjo Matejiček
Damir Semenski
Zdravko Vnuček

UVOD U STATIKU sa zbirkom zadataka

Drugo popravljeno i dopunjeno izdanje

Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.

SADRŽAJ

PREDGOVOR	uz drugo popravljeno i dopunjeno izdanje	7
PREDGOVOR	uz prvo izdanje	7
1	UVOD	9
1.1	OZNAČIVANJE	9
1.2	POJAM KRUTOG TIJELA	10
1.3	POJAM SILE	10
1.4	MJERNI SUSTAV U STATICI	11
1.5	OSNOVNI ZAKONI MEHANIKE PO NEWTONU	11
1.6	OSNOVNI AKSIOMI STATIKE	11
2	REDUKCIJA SUSTAVA SILA	13
2.1	STATIČKI MOMENT SILE I SPREG SILA	13
2.1.1	Statički moment sile F s obzirom na točku O	13
2.1.2	Spreg sile	13
2.1.3	Momentno pravilo ili Varignonov teorem	14
2.2	REDUKCIJA PROSTORNOG SUSTAVA SILA	14
2.2.1	Redukcija općeg sustava sila u prostoru na glavni vektor i moment, Pojam redukcije sile	14
2.2.2	Redukcija paralelnog sustava sila u prostoru	15
2.2.3	Redukcija konkurentnog sustava sila u prostoru	16
2.3	REDUKCIJA RAVNINSKOG (KOMPLANARNOG) SUSTAVA SILA	17
2.3.1	Redukcija ravninskog sustava sila različitog pravca djelovanja	17
2.3.2	Rastavljanje sile u tri komponente u ravnini	19
2.3.3	Redukcija paralelno - ravninskog sustava sila	21
2.3.4	Rastavljanje sile u dvije paralelne sile	22
2.3.5	Redukcija konkurentno – ravninske grupe sila	23
2.3.6	Rastavljanje sile u dvije komponente različitog pravca	24
	Primjeri i zadaci uz poglavlje 2.	25
3	OSLOBADANJE KRUTOG TIJELA	31
3.1	VEZA TIJELA PREKO UŽETA ILI ŠTAPA	31
3.2	POMIČNI OSLOMAC - VEZA TIJELA U GLATKOM DODIRU	32
3.3	NEPOMIČNI OSLOMAC - ZGLOBNA VEZA TIJELA	32
3.4	UKLJEŠTENJE	33
3.5	VEZA TIJELA U DODIRU UZ PRISUSTVO TRENJA	33
3.6	VEZA TIJELA POMOĆU SPIRALNE OPRUGE	34
3.6.1	Linearna ovisnost sile i produljenja ili skraćanja opruge	34
3.7	VEZA TIJELA POMOĆU UŽETA I KOLOTURA	35
3.7.1	Arhimedov koloturnik	35
	Primjeri i zadaci uz poglavlje 2.	36
4	UVJETI RAVNOTEŽE TIJELA	41
4.1	SUSTAV SILA U PROSTORU	41
4.1.1	Opći sustav sila	41
4.1.2	Sustav paralelnih sila u prostoru	41
4.1.3	Sustav konkurentnih sila u prostoru	42
	Primjeri i zadaci uz poglavlje 4.1	43
4.2	RAVNOTEŽA RAVNINSKOG (KOMPLANARNOG) SUSTAVA SILA	58
4.2.1	Opći sustav sila u ravnini	58
4.2.2	Paralelni sustav sila u ravnini	60
	Primjeri i zadaci uz poglavlje 4.2	62
5	UVJETI RAVNOTEŽE TIJELA KADA DJELUJE TRENJE	79
5.1	TRENJE U DODIRU KRUTIH TIJELA (Statičko trenje i kinetičko trenje)	79
5.1.1	Vrste trenja krutih tijela u dodiru	80
5.1.2	Konus (čunj) trenja	80
5.1.3	Površina ravnoteže kod trenja	80
5.2	TRENJE UŽETA	81
5.2.1	Eulerova formula za trenje užeta	81
5.3	TRENJE ROTIRAJUĆIH TIJELA	82
5.3.1	Radijalni ležaj	82
5.3.2	Aksijalni ležaj	82

5.4	TRENJE KOTRLJANJA	83
5.4.1	Trenje kotrljanja kod vuče i vožnje vozila	83
5.5	TRENJE TIJELA NA KOSINI	83
	Primjeri i zadaci uz poglavlje 5	86
6	NOSAČI	111
6.1	RAVNOTEŽA RAVNIH REŠETKASTIH NOSAČA	111
6.1.1	Općenito	111
6.1.2	Određivanje reakcija veza u osloncima nosača	111
6.1.3	Određivanje sila u štapovima	111
	Primjeri i zadaci uz poglavlje 6.1	112
6.2	RAVNI PUNI NOSAČI	124
6.2.1	Općenito	124
6.2.2	Određivanje reakcija veza u osloncima nosača	124
6.2.3	Određivanje unutrašnjih sila u poprečnom presjeku nosača	125
6.2.4	Ovisnost između komponenti unutrašnjih sila u poprečnom presjeku nosača	126
6.2.5	Dijagrami unutrašnjih sila u poprečnom presjeku nosača	126
	Primjeri i zadaci uz poglavlje 6.2	128
6.3	SLOŽENI ILI GERBEROVI NOSAČI	136
	Primjeri i zadaci uz poglavlje 6.3	137
6.4	OKVIRNI NOSAČI	141
	Primjeri i zadaci uz poglavlje 6.4	145
6.5	PROSTORNI NOSAČI	156
	Primjeri i zadaci uz poglavlje 6.5	156
7	GEOMETRIJSKE ZNAČAJKE TIJELA I PLOHA	162
7.1	TEŽIŠTE	162
7.1.1	Težište tijela	162
7.1.2	Težište ravne ploče (težište površine)	162
7.1.3	Težište linije	164
7.1.4	Pappus – Guldinova pravila	165
	Primjeri i zadaci uz poglavlje 7.1	166
7.2	GEOMETRIJSKI MOMENTI TROMOSTI (INERCIJE) RAVNE POVRŠINE	174
7.2.1	Definicije	174
7.2.2	Osnovni teoremi o momentima tromosti	174
7.2.3	Glavni momenti tromosti presjeka	178
7.2.4	Mohrova kružnica tromosti	178
7.2.5	Polumjer tromosti i elipsa tromosti presjeka	179
7.3	Momenti otpora presjeka	180
	Primjeri i zadaci uz poglavlja 7.2 i 7.3	182
8	LANČANICE	193
8.1	PARABOLIČNA LANČANICA	194
8.2	OBIČNA LANČANICA	195
	Primjeri i zadaci uz poglavlje 8	196
9	PROGRAM STATIKA	207
9.1	O PROGRAMU	207
9.1.1	Izbor skupine zadataka	207
	DODATAK	245
I.	PODSJETNIK MATEMATIČKIH FORMULA	245
II.	OSNOVNI POJMOVI O VEKTORIMA	251
	NUMERIČKA RJEŠENJA ZADATAKA	257
	LITERATURA	273
	KAZALO POJMOVA	275
	BILJEŠKA O AUTORIMA	279

PREDGOVOR

uz drugo popravljeno i dopunjeno izdanje

Prije svega zahvaljujemo se svima, osobito studentima, koji su uočili nekoliko pogrešaka u prvom izdanju kao i kolegama profesorima koji su svojim sugestijama ukazali na poboljšanja u ovom izdanju.

Iako od 2002. postoji i elektronički udžbenik (www.sfsb.hr/ksk/statika) i dalje je zanimljivo zanimanje za «tvrdo izdanje». Stoga smo, prije svega, popravili ranije učene pogreške te dopunili teorijske dijelove udžbenika te dodali još riješenih primjera i zadataka.

Izmjene koje se učinjene u ovom izdanju su i u redoslijedu poglavlja, a repetitorij o vektorima i skalarima te mali podsjetnik iz matematike te sva numerička rješenja zadataka stavljena su na kraju udžbenika.

Isto tako, na svim je slikama smanjen font slova tako da su grafički postale preglednije. Grafičke su metode ovdje nešto reducirane, a prošireni su analitički postupci. Isto tako više je pojmova detaljnije opisano.

Statistička jednogodišnja praćenja posjećenosti elektroničkog udžbenika pokazuju zanimanje za program «web statika». Posjetitelji stranice ga često koriste radi prijateljskog grafičkog sučelja, ali on radi samo u «on line» načinu rada. On je u pravilu jednak po programskom kodu programu «statika.exe» koji se jednostavno skine s iste stranice, a radi na svim platformama računala u «dos» okruženju te zahtjeva samo 72 kB radne memorije u «off line» načinu rada. Upute za rad s ovim programom su i nadalje pri kraju udžbenika.

Svjesni smo da su se i u ovom popravljenom izdanju mogle potkrasti pogreške, možda i u dopunama. Biti ćemo zahvalni svima koji nam putem elektroničke pošte (adrese dostupne na gore spomenutoj stranici) ili na bilo koji način ukažu na propuste i pogreške.

U Slavanskom Brodu i Zagrebu, listopada 2004.

Autori

PREDGOVOR

uz prvo izdanje

Ovaj je udžbenik, prije svega, namijenjen studentima strojarstva i brodogradnje kao priručnik za vježbe i pripremanje ispita iz Statike, koja se po nastavnom programu izučava u Mehanici I u prvoj godini studija. Višegodišnje je iskustvo pokazalo da istaknuti primjeri na predavanjima i rješavani zadaci na vježbama, u okviru redovne nastave, nisu dostatni za utvrđivanje teorijskih osnova i razumijevanje temeljnih načela Statike.

Dobar dio građe za ovaj udžbenik korišten je iz, sada već rasprodanog, udžbenika *Zbirka zadataka iz mehanike I – Statika* [10], uz značajnu dopunu u teorijskom dijelu, posve novom grafičkom izgledu te sadržajnim izmjenama u svrhu suvremenijeg pristupa u tumačenju građe. Udžbenik sadržava 70 riješenih primjera te 261 zadatak s rješenjima. Sve je ilustrirano s 574 slike i ilustracije te 9 tablica.

Ovaj je udžbenik podijeljen u osam poglavlja i u redoslijedu kako se predaje na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu i Strojarskom fakultetu u Slavanskom Brodu Sveučilišta u Osijeku, što je slično i s programima drugih strojarskih i brodograđevnih fakulteta u Republici Hrvatskoj. Najveći broj zadataka je iz ispitnih zadaća na pismenom dijelu ispita iz Mehanike I u proteklom desetljeću na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu i na Strojarskom fakultetu u Slavanskom Brodu.

Svrha je ovog udžbenika da studentima omogućí kratki repetitorij teorijskih znanja na početku svakog poglavlja te primjenu teorijskih znanja na nizu zadataka koji slijede riješene primjere. Isto tako, udžbenik bi im trebao pomoći da se naviknu na metodičan rad pri rješavanju zadataka.

U *prvom* su poglavlju dani osnovni pojmovi o vektorima u onom opsegu koji je neophodan za primjenu u Statiki. Vektorski račun može često zadavati znatne poteškoće ako se dobro ne uvježba uz slikovni prikaz rezultata računanja. Ovaj sadržaj ni izdaleka ne obuhvaća sva znanja o vektorima koja studenti strojarstva i brodogradnje stječu u svom studiju, posebice iz matematike.

Drugo poglavlje ima poseban značaj jer se višegodišnjim praćenjem riješenih zadataka na ispiti-ma, uvidjelo da studentima ipak manjkaju znanja iz prvog koraka u rješavanju zadataka iz Statike: uočavanje tijela koje se analizira i oslobađanje toga tijela od veze s drugima ili s okolinom na sustavan način. Ovdje su istaknuti i osnovni pojmovi o spiralnoj opruzi, bez dokaza navedenih formula, a koji se mogu naći u *Teoriji elastičnosti*.

U *trećem* su poglavlju obrađeni mogući oblici redukcije sustava sila, od općeg primjera u prostoru do jednostavnih konkurentnih sustava sila.

Uvjeti ravnoteže: vektorski, grafički i analitički, obrađeni su u *četvrtom* poglavlju u nizu riješenih primjera i zadataka s rezultatima koje su već provjerili i studenti, rješavajući ih na ispitima.

U *petom* je poglavlju obuhvaćeno trenje klizanja, otpor pri kotrljanju, trenja u ležajevima te trenje užeta, s posebnom primjenom i kod remenskog prijenosa.

Posebna je pozornost dana *šestom* poglavlju gdje je i najveći broj riješenih primjera i zadataka, a koji su u svezi s ravnim rešetkastim nosačima te analizom unutrašnjih sila u ravnim punim nosačima. Ovdje je primijenjeno pravilo o crtanju dijagrama unutrašnjih sila na način da su pozitivne vrijednosti crtane *iznad* apcinsne osi što je u suglasju s većinom svjetskih udžbenika iz Statike i Nauke o čvrstoći.

U *sedmom* se poglavlju definiraju težišta homogenih tijela i ravnih likova. Značajan dio ovog poglavlja su momenti tromosti ravnih poprečnih presjeka koji nalaze primjenu u Nauci o čvrstoći.

Konačno, u *osmom* se poglavlju obrađuju idealno savitljivi nosači – *lančanice*. Obrađene su parabolična i obična lančanica.

Posebno, *deveto* poglavlje, čini posljednji dio udžbenika u kome se pruža mogućnost korištenja jednostavnog kompjuterskog programa *STATIKA* u rješavanju šest tipova zadanih zadataka s praktički nebrojeno mnogo kombinacija koje čitatelj može izabrati po volji. Program je dostupan svakome i nalazi se na *Internetu*, dok se podloge za rad s ovim programom nalaze u ovom udžbeniku.

Na kraju je udžbenika *Dodatak* koji sadrži *podsjetnik matematičkih formula* iz algebre, geometrije, trigonometrije, analitičke geometrije te diferencijalnog računa. Ovo je samo najnužniji pregled češće korištenih formula uz skice koje nadopunjuju navedene izraze.

Jasno je da se u ovom prvom izdanju *Uvoda u Statiku sa zbirkom zadataka* mogu uočiti poneki nedostaci i greške koje je bilo teško u potpunosti izbjeći, zato ćemo biti zahvalni studentima, kolegama, napose čitateljima, koji nas upozore na možebitne ispravke. Svako zapažanje možete nam uputiti i preko *Interneta* (podaci na <http://www.sfsb.hr/ksk/statika>). Sve možebitne ispravke ćemo objaviti na istoj adresi.

Ovom prigodom želimo se iskreno zahvaliti svima koji su nam pružili pomoć i podršku. Posebice ističemo svoju zahvalnost recenzentima prof. dr. sc. Josipu Brniću, prof. dr. sc. Stjepanu Jeciću i prof. dr. sc. Osmanu Muftiću, koji su nam ukazali na neke nedostatke te nam svojim sugestijama pomogli i u onim najistančanijim nijansama pojedinim definicijama kako bi ih čitatelji bez osobitog napora mogli razumjeti i primijeniti. Rad lektorice mr. sc. Jasne Ažman nas je oduševio. Oni gotovo jedva uočljivi jezični zahvati u tekstu, zamjetno su poboljšali razumljivost. Zahvaljujemo se uredniku *Biblioteke* prof. dr. sc. Ivi Alfireviću na korisnim uputama, kako bi ovaj udžbenik kao *Knjiga 1* u biblioteci *Tehnička mehanika*, dostojno prezentirao ovaj niz. Nakladnik je stalno pokazivao iznimnu susretljivost i pružao nam pomoć svojim znanjem i iskustvom pa gospodi Franji Maletiću i dr.sc. Radulu Kneževiću iskreno zahvaljujemo.

U svibnju 1999. godine.

Autori

1 UVOD

1.1 OZNAČIVANJE

Radi jednostavnijeg praćenja kratkog repetitorija, na početku svakog poglavlja te riješenih primjera, primjenjivane su jedinstvene oznake za pojedine mehaničke i geometrijske veličine koje su gotovo istovjetne s oznakama u udžbeniku [12]. Odstupanja koja su učinjena, uvedena su radi bolje čitljivosti, ali su usklađena sa Zakonom o mjeriteljstvu Republike Hrvatske.

Kako je sila vektor, to je nužno da se označiva na odgovarajući način kao npr. \vec{F} , \vec{F}_1 , \vec{F}_A , \vec{N} , \vec{S} i slično. Od oznake ($\vec{\quad}$) se u nekim crtežima odstupilo iz praktičnih razloga, jer bi to otežavalo njihovu čitljivost. Sile koncentriranog opterećenja u pravilu su označivane oznakom F te gdje je to potrebno i dopunskim indeksom točke hvatišta ili bročanim indeksom. U pravilu su korištene sljedeće oznake :

- \vec{F}_B ili F_B - sila s hvatištem u točki B,
- $F_{Bx}\vec{i}$, F_{Bx} - komponenta odnosno projekcija sile F_B u smjeru osi x ,
- \vec{F}_R ili \vec{R} - rezultanta sustava sila ,
- $F_{Rx}\vec{i}$, R_x - komponenta odnosno projekcija rezultante F_R u smjeru osi x ,
- \vec{F}_S , F_S ili S - sila u štapu ili užetu,
- \vec{F}_{nA} , F_{nA} ili N_A - sila normalna na zajedničku dodirnu površinu u točki A,
- \vec{F}_{tA} , F_{tA} ili T_A - sila trenja u točki A,
- \vec{G} ili G - težina homogenog valjka, kugle, grede i slično,
- \vec{Q} ili Q - težina tereta, homogene ploče i slično,
- \vec{M} ili M - moment sprega sila.

U pravilu su izbjegavane oznake koje bi sadržavale dva indeksa što znatno otežava čitljivost i preglednost jednadžbi.

Unutrašnje su sile u poprečnom presjeku nosača označivane na uobičajeni način:

- N - uzdužna unutrašnja sila u nosaču (u pravilu u smjeru osi x),
- Q_z , Q_y - poprečne unutrašnje sile u nosaču (u smjeru osi z odnosno y),
- M_y , M_z - momenti savijanja u nosaču (oko osi y odnosno z),
- M_x ili M_t - moment uvijanja u nosaču (oko osi x).

Geometrijske su veličine označene oznakama:

- A, B, - točke na promatranom tijelu,
- S - težište tijela,
- a , b , l , ... - udaljenosti između točaka, duljina štapa i sl.,
- α , β , - kut, mjeren u stupnjevima, dok je $\hat{\alpha}$ mjeren u radijanima,
- A - ploština površine,
- S_y , S_z - statički momenti površine oko osi y odnosno z ,
- I_y , I_z - aksijalni momenti tromosti površine oko osi y odnosno z ,
- I_{yz} - devijacijski moment tromosti površine oko osi y i z ,
- I_1 , I_2 - glavni momenti tromosti površine oko glavnih osi 1 i 2.

Oznake koje se rjeđe susreću, obrazložene su u tekstu gdje se po prvi put javljaju.

Primjenjivan je desni Descartesov koordinatni sustav i u primjeru ravninskih zadaća je os x položena horizontalno udesno, a os y vertikalno prema gore dok je os z okomita na ravninu crteža. Kod ravnih je nosača os x uvijek u smjeru uzdužne osi nosača udesno, os z vertikalno prema dolje, a os y okomita je na ravninu nosača. Poštujući ovo pravilo kod ravnih je okvirnih nosača za svaki ravni dio nosača postavljen zasebni koordinatni sustav. Radi jednoznačnosti komponenti reakcija veza, uvedene su oznake „H“ za horizontalnu komponentu i „V“ za vertikalnu komponentu reakcije.

Čitatelji će zamijetiti da su u primjeru grafičkih rješenja, a u nedostatku boljeg slikovnog izraza, nepoznate sile crtane kao dvije tanke paralelne linije sa strelicom na kraju, a poznate su izvučene punom debljom linijom sa strelicom na kraju, za što se nadamo da će pomoći u boljem razumijevanju grafičkih rješenja. Isto tako, očitane vrijednosti grafičkih rješenja na temelju nacrtanog mjerila, nisu istovjetne s analitičkim rješenjem radi ograničene točnosti koju inače daju grafička rješenja, a što je povezano s relativnom debljinom pera i veličinom crteža plana sila. Odstupanje ne bi trebalo biti veće od 3 %.

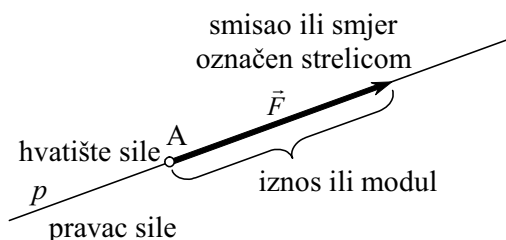
1.2 POJAM KRUTOG TIJELA

Kod izučavanja *statike* važna je pretpostavka da su sva tijela idealno kruta, tj. da se ne deformiraju pod djelovanjem opterećenja. Kruto je tijelo dakle idealizirano čvrsto tijelo. Ono se pod djelovanjem opterećenja ne deformira - ne mijenja svoj oblik i dimenzije. Kako se *statika* koji put naziva i *geometrija sila*, uistinu je važno da se kod ovakve analize geometrija tijela ne mijenja za vrijeme djelovanja sila.

1.3 POJAM SILE

Sila je usmjerena ili vektorska veličina koja je određena pravcem djelovanja, hvatištem, iznosom i smislom. Sila se može objasniti kao međusobno djelovanje materijalnih tijela koja nastoji promijeniti stanje gibanja tijela. Ona može tijelo ubrzati, a čvrsto tijelo i deformirati.

Na primjer, sila iznosa 25 N predočuje se:



$$\text{Mjerilo: } \lambda_F = \frac{10 \text{ N}}{1 \text{ cm}_{\text{crt}}} \text{ ili } 1 \text{ cm}_{\text{crt}} \hat{=} 10 \text{ N}$$

Ovakva je predodžba "u mjerilu" uvijek nužna kada se vrše grafička zbrajanja ili oduzimanja vektora sile ili drugi grafički postupci kao npr. plan ili poligon sila, verižni poligon i sl. Iznos (intenzitet, apsolutna vrijednost ili modul) sile je *skalarna veličina* i označava se kao npr. $|\vec{F}|$ ili F . Oznaka "crt" je skraćenica od riječi crtež. Ovim se želi posebno naglasiti da je to duljina dužine neke veličine pa tako i duljina strelice sile na crtežu, a ne u stvarnosti.

Sila je u *Statici* vektor vezan uz pravac djelovanja, dok hvatište sile nije ovdje bitno. Ovo znači da sila može "kliziti" po svom pravcu. Ova je činjenica u *Statici* važna osobito kod grafičkih postupaka, ali i kod statičkog momenta sile gdje je pokazano da hvatište sile u *Statici* s ovoga stajališta nije bitno.

Naravno u *Nauci o čvrstoći* (Teoriji elastičnosti, Teoriji plastičnosti i sl.) promatra se čvrsto tijelo i hvatište sile je bitno te se ona ne smije pomicati po svom pravcu.

1.4 MJERNI SUSTAV U STATICI

U Statici se upotrebljava, kao i inače u Tehničkoj mehanici, Međunarodni sustav jedinica. Za Tehničku su mehaniku važne:

Veličina:		Mjera:	
Naziv	Oznaka	Jedinica	Naziv
duljina	l	m	metar
vrijeme	t	s	sekunda
masa	m	kg	kilogram
sila	F	N	njutn

Ostale jedinice koje se susreću u *Tehničkoj mehanici* su izvedene iz osnovnih. Tako je izvedena jedinica za silu N (njutn) na temelju II. Newtonovog zakona.

1.5 OSNOVNI ZAKONI MEHANIKE PO NEWTONU

- I.) Svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili stanju jednolikog pravocrtnog gibanja sve dok neka sila koja na nj djeluje ne promijeni to stanje. (Zakon tromosti)
- II.) Ubrzanje (vektor!) (promjena brzine) proporcionalno je sili koja djeluje na tijelo, a zbiva se u smjeru djelovanja sile. (Zakon proporcionalnosti sile i ubrzanja)
- III.) Dva tijela djeluju uvijek jedno na drugo silama koje su po veličini jednake, ali suprotna smisla. (Princip akcije i reakcije)

1.6 OSNOVNI AKSIOMI STATIKE

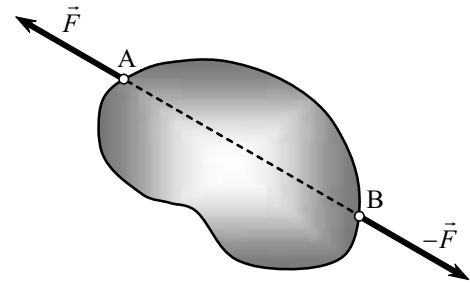
- I.) Ako na kruto tijelo djeluju dvije sile, ono će biti u ravnoteži ako su sile kolinearne, jednake po iznosu, a usmjerene suprotno. Kolinearne sile su one sile koje leže na istom pravcu.
- II.) Rezultanta se dviju sila koje djeluju u istoj točki krutog tijela određuje po zakonu paralelograma. Dakle, ove se dvije sile mogu zamijeniti rezultantom, a isto tako se ova rezultanta (dakle nova sila) može rastaviti na dvije sile koje djeluju u istoj točki, a na pravcu ove rezultante.
- III.) Ravnoteža ili jednoliko gibanje krutog tijela neće se promijeniti ako se tijelo oslobodi veza i umjesto njih dodaju se krutom tijelu sile koje ograničavaju slobodu gibanja tijela na jednak način. Ove se sile nazivaju reakcijama veza.
- IV.) Stanje ravnoteže ili jednolikog gibanja neće se promijeniti ako se tijelu doda ili oduzme uravnoteženi sustav sila.
- V.) Ako deformabilno tijelo pod djelovanjem sila zauzme deformirani ravnotežni položaj, ravnoteža se neće narušiti ako se deformirano tijelo razmatra kao idealno kruto tijelo. Ovaj se aksiom često naziva i princip solidifikacije ili načelo ukrućenja.

Aksiom je tako očita tvrdnja da se ne dokazuje. Kako se pretežiti dio Statike bavi ravnotežom sila koje opterećuju neko tijelo može se reći da pored gornjih aksioma Statike ulogu u rješavanju takvih zadataka ima i III. Newtonov zakon mehanike.

U narednih nekoliko slika i objašnjenja pokazano je kolika je važnost osnovnih aksioma Statike.

Djelovanje dviju sila na tijelo (najčešće je to uže ili štap) kada su u ravnoteži je polazni ili osnovni oblik opterećenja.

Ovaj sustav od dvije sile može biti u ravnoteži samo onda ako su obje sile po iznosu jednake, a suprotno usmjerene te naravno leže na istom pravcu (slika 1.1). U protivnom to bi bio spreg sila o čemu se govori u sljedećem poglavlju.

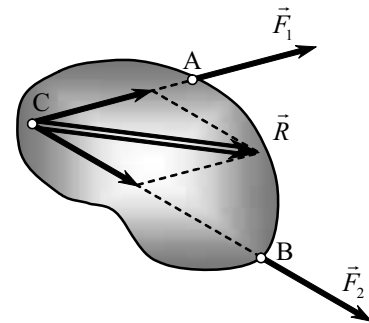


Slika 1.1

Rezultanta se dviju sila koje djeluju u istoj točki krutog tijela određuje po zakonu paralelograma.

Koristeći načelo da je sila klizni vektor, sila se može pomicati po svom pravcu pa tako i dvije sile koje leže u istoj ravnini mogu se dovesti do točke u kojoj se njihovi pravci sijeku (slika 1.2).

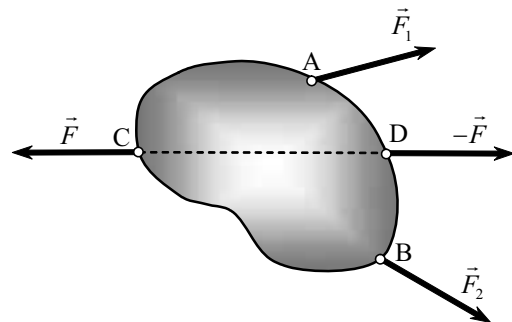
Dakle, ove se dvije sile mogu zamijeniti rezultantom, a isto tako se ova rezultanta (dakle nova sila) može rastaviti na dvije sile koje djeluju u istoj točki, a na pravcu ove rezultante.



Slika 1.2

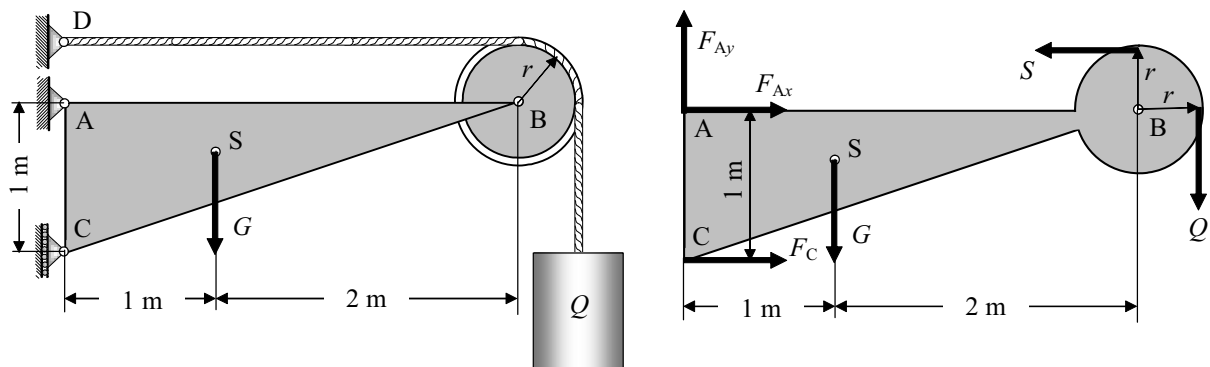
Stanje ravnoteže ili jednolikog gibanja neće se promijeniti ako se tijelu doda ili oduzme uravnoteženi sustav sila (slika 1.3).

Kako se sile \vec{F} i $-\vec{F}$ međusobno poništavaju to znači da nemaju rezultantu. Rezultanta sila \vec{F}_1 i \vec{F}_2 ostaje i nadalje nepromijenjena.



Slika 1.3

Ako neki sustav tijela pod djelovanjem sila zauzme ravnotežni položaj, ravnoteža se neće narušiti ako se ta tijela razmatraju kao jedno idealno kruto tijelo, slika 1.4. Ovaj se aksiom često naziva i princip solidifikacije ili načelo ukrućenja.



Slika 1.4

2 REDUKCIJA SUSTAVA SILA

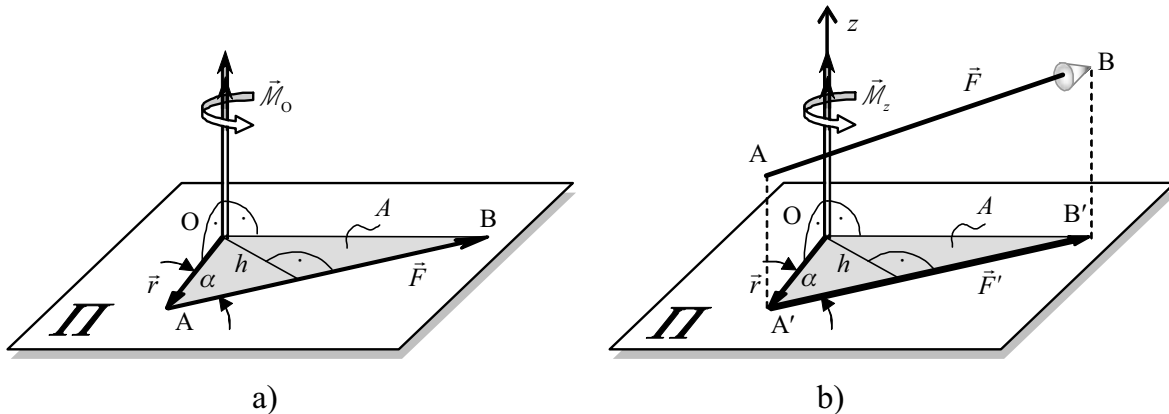
2.1 STATIČKI MOMENT SILE I SPREG SILA

2.1.1 Statički moment sile \vec{F} s obzirom na točku O odnosno os z

$$\vec{M}_O^F = \vec{r} \times \vec{F}.$$

To je vektor s hvatištem u O i upravljen okomito na ravninu trokuta OAB (slika 2.1a). Njegov se smjer određuje po pravilu desnog vijka, dok je njegova apsolutna vrijednost (intenzitet ili modul) jednaka umnošku iznosa sile i njezinog kraka, tj. okomite udaljenosti h točke O od pravca djelovanja sile: $|\vec{M}_O^F| = M_O^F = F \cdot h$.

Sa slike je vidljivo da je *iznos* statičkog momenta sile \vec{F} s obzirom na točku O jednak dvostrukoj ploštini površine A trokuta OAB. Kako stranicu ovog trokuta \overline{AB} predstavlja dužina čija je duljina jednaka iznosu sile \vec{F} , ploština se površine neće promijeniti ako se vektor sile pomakne bilo kamo po svom pravcu djelovanja, dakle sila je u *statici* klizni vektor tj. može se pomicati po pravcu djelovanja.



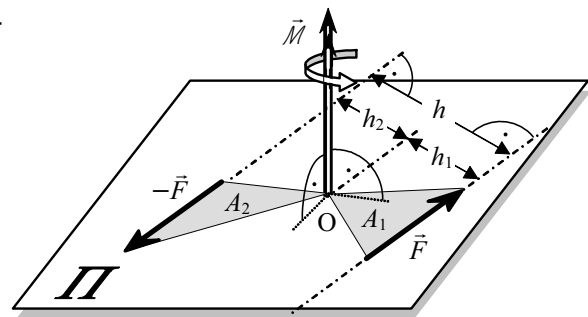
Slika 2.1

Statički moment sile \vec{F} s obzirom na os z jest vektor, a predstavlja statički moment komponente sile \vec{F}' s obzirom na točku O u kojoj os z probija ravninu Π . Iznos sile \vec{F}' jednak je projekciji sile \vec{F} na ravninu Π koja stoji okomito na os z (slika 2.1b).

$$\vec{M}_z^F = \vec{r} \times \vec{F}', \text{ odnosno } |\vec{M}_z^F| = M_z^F = F' \cdot h.$$

2.1.2 Spreg sila

Spregom sila nazivaju se dvije po iznosu jednake suprotno usmjerene sile na paralelnim pravcima (slika 2.2). Moment sprega je *vektorska* veličina koja je *slobodni* vektor i stoji *okomito* na ravninu Π sprega. Smjer je određen pravilom desnog vijka, a iznos je: $M = F \cdot h$. Kako vrijedi pravilo objašnjeno slikom 2.1a može se pisati: $2A_1 + 2A_2 = M = |\vec{F}|h_1 + |-\vec{F}|h_2$.



Slika 2.2

Kako su po iznosu sile \vec{F} i $-\vec{F}$ jednake:

$M = F(h_1 + h_2) = Fh$ što znači da je moment sprega \vec{M} *slobodan* vektor jer položaj točke O može ležati bilo gdje u ravnini.

2.1.3 Momentno pravilo ili Varignonov teorem

Na krutu ploču Π djeluje sustav komplanarnih sila različitog pravca (slika 2.3). Ako vrijedi da je rezultanta toga sustava sila $\vec{R} \neq \vec{0}$ tada je $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$.

Ovo se pravilo može primijeniti također na konkurentne i paralelne sile u prostoru. Skalarno se, u ravnini, uzimajući u obzir smisao djelovanja momenta sile može pisati

$$M_O = R \cdot h = F_1 \cdot h_1 + F_2 \cdot h_2 + \dots + F_n \cdot h_n,$$

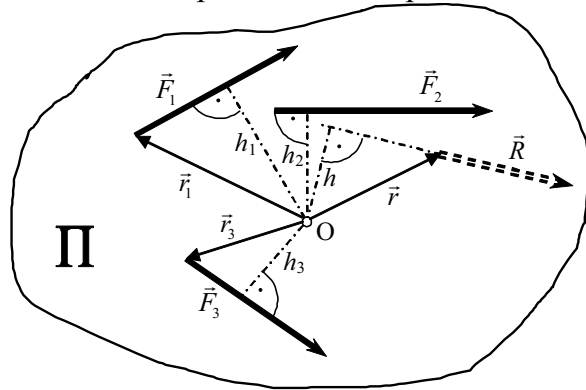
tj. statički moment rezultante sustava sila s obzirom na točku O jednak je zbroju momenta ovoga sustava sila s obzirom na istu točku. Ovo se pravilo zove *momentno pravilo ili Varignonov teorem*.



- pozitivan smjer momenta



- negativan smjer momenta



Slika 2.3

2.2 REDUKCIJA PROSTORNOG SUSTAVA SILA

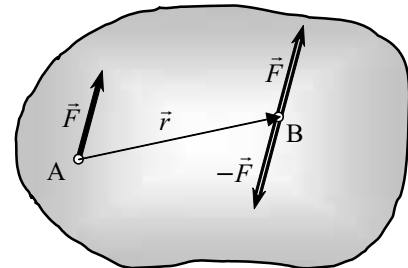
2.2.1 Redukcija općeg sustava sila u prostoru na glavni vektor i glavni moment

a) Pojam redukcije sile

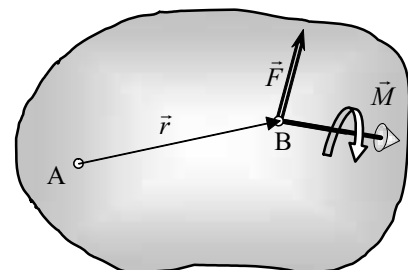
Redukcija sile \vec{F} koja djeluje na tijelo (npr. s hvatištem u točki A) znači njezin paralelni pomak u neku drugu točku hvatišta, npr. B. Ovo ima za posljedicu da se k tijelu mora pridodati odgovarajući spreg sila kako bi se poništio efekt redukcije sile (efekt paralelnog pomicanja sile).

Dokaz:

- za tijelo na koje djeluje sila \vec{F} u točki A treba odrediti željenu točku redukcije B, koja je prema točki A određena vektorom položaja \vec{r} . U točki B dodati uravnotežene dvije sile (dvije sile istog iznosa i pravca djelovanja, a suprotnog smjera) \vec{F} i $-\vec{F}$, slika 2.4a;
- sila \vec{F} u točki A i sila $-\vec{F}$ u točki B čine par (spreg) sila $\vec{M} = \vec{r} \times (-\vec{F}) = -(\vec{r} \times \vec{F})$, a spreg sila je slobodan vektor te se može postaviti i u točku B;
- na ovaj je način izvršen paralelni pomak ili redukcija sile u točku redukcije B, slika 2.4b.



Slika 2.4a



Slika 2.4b

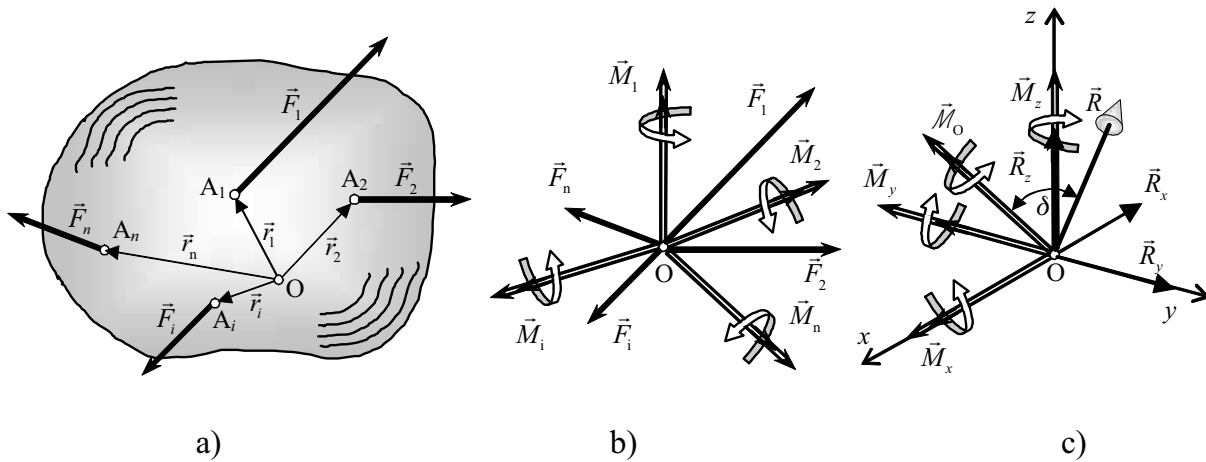
Kada je zadan sustav sila u prostoru $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kao na slici 2.5a, koje djeluju u točkama A_1, A_2, \dots, A_n , tada redukcijom tih sila na proizvoljnu točku O (centar redukcije) slijedi:

n sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ u točki O, kojih je rezultanta – glavni vektor: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$

n spregova sila, koji su ekvivalentni jednom rezultatnom spregu sila – glavni moment u točki O:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n.$$

\vec{R} i \vec{M}_O nazivaju se ponekad zajedničkim nazivom rezultanta prostornog sustava sila. Daljnjom se redukcijom ovo može svesti i na *dinamu* (dinamički vijak).



Slika 2.5

ANALITIČKE KARAKTERISTIKE \vec{R} i \vec{M}_O

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz},$$

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}), \quad M_y = \sum_{i=1}^n (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}), \quad M_z = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}),$$

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

$$M_O = |\vec{M}_O| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R};$$

$$\cos \varphi = \frac{M_x}{M_O}; \quad \cos \psi = \frac{M_y}{M_O}; \quad \cos \vartheta = \frac{M_z}{M_O};$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

$$\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi + \cos^2 \vartheta = 1.$$

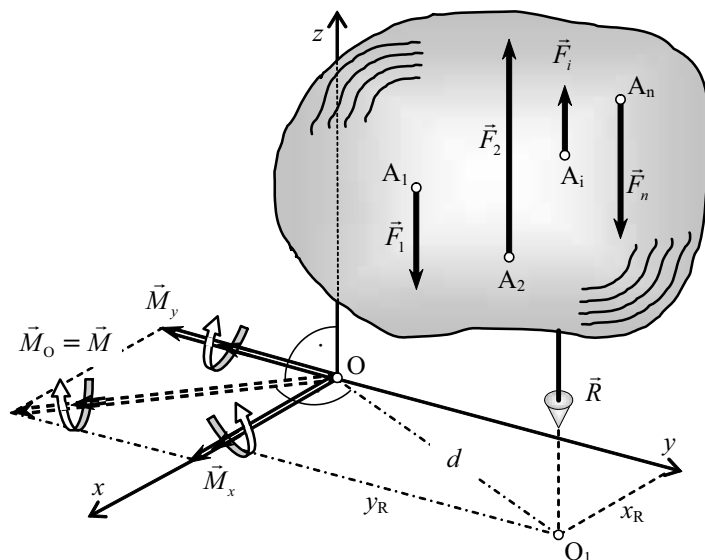
2.2.2 Redukcija paralelnog sustava sila u prostoru

Kada je zadan sustav paralelnih sila u prostoru $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kao na slici 2.6a, moguće ga je zamijeniti s jednom silom - rezultantom na sljedeći način. Odabere se koordinatni sustav tako da je jedna os npr. z, paralelna sa zadanim sustavom sila. Izvrši se redukcija sila na točku ishodišta O pri čemu je:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0;$$

$$R_z = R = \sum_{i=1}^n F_{iz} = \sum_{i=1}^n F_i.$$

Momenti oko osi su:



Slika 2.6a

$$M_x = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}) = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot F_i), \quad M_y = \sum_{i=1}^n (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}) = \sum_{i=1}^n (-x_i \cdot F_i),$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) = 0 \text{ te je } \vec{M}_O = M_x \vec{i} + M_y \vec{j},$$

odnosno $M_x = y_R \cdot R$ i $M_y = -x_R \cdot R$ gdje su x_R i y_R koordinate točke O_1 u kojoj treba položiti pravac rezultante \vec{R} da ona zamijeni zadani sustav sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$.

2.2.3 Redukcija konkurentnog sustava sila u prostoru

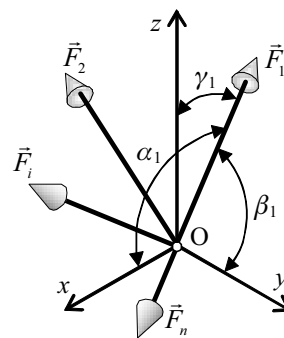
a) Rezultanta konkurentno-prostornog sustava sila

Kada je zadan sustav sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, koje djeluju na jednu točku (slika 2.6b) pri čemu je svaka sila zadana svojim iznosom $|\vec{F}_i|$ i kutovima α_i, β_i i γ_i prema pozitivnim smjerovima koordinatnih osi, onda su iznosi komponenta tih sila:

$$F_{ix} = F_i \cos \alpha_i,$$

$$F_{iy} = F_i \cos \beta_i,$$

$$F_{iz} = F_i \cos \gamma_i, \text{ gdje je } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$



Slika 2.6b

Rezultanta tih sila ima projekcije u pravcima koordinatnih osi:

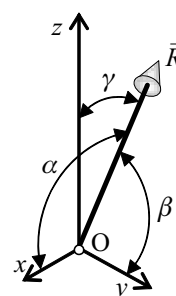
$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum_{i=1}^n (F_i \cos \alpha_i), \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = \sum_{i=1}^n (F_i \cos \beta_i),$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = \sum_{i=1}^n (F_i \cos \gamma_i).$$

Ove su tri sile $R_x \vec{i}$, $R_y \vec{j}$ i $R_z \vec{k}$ ekvivalentne zadanom sustavu sila. Njihovim se sastavljanjem može odrediti jedna sila \vec{R} , koja je rezultanta zadanog sustava sila, a čiji je iznos: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$,

a njezin je pravac određen s kosinusima kutova (slika 2.6c):

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$



Slika 2.6c

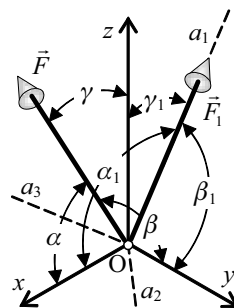
b) Rastavljanje sile u tri zadana pravca u prostoru

Potrebno je izabrati ishodište koordinatnog sustava u sjecištu zadanih pravaca, zadanu silu F smjestiti u to ishodište te iz donjih jednadžbi izračunati iznose F_1, F_2 i F_3 sila na pravcima a_1, a_2 i a_3 . Ako se za neku silu izračuna negativna vrijednost, tada to znači da je smjer te sile suprotan pretpostavljenom (slika 2.6d). Radi preglednosti ucrtana je samo sila \vec{F}_1 na pravcu a_1 s kutovima α_1, β_1 i γ_1 .

$$F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 = F \cos \alpha,$$

$$F_1 \cos \beta_1 + F_2 \cos \beta_2 + F_3 \cos \beta_3 = F \cos \beta,$$

$$F_1 \cos \gamma_1 + F_2 \cos \gamma_2 + F_3 \cos \gamma_3 = F \cos \gamma.$$



Slika 2.6d

Franjo Matejiček
Damir Semenski
Zdravko Vnućec
UVOD U STATIKU SA ZBIRKOM ZADATAKA

Nakladnik
GOLDEN MARKETING-TEHNIČKA KNJIGA
Jurišićeva 10, 10000 Zagreb
Telefoni: 01/4810-819 i 01/4810-820; telefaks: 01/4810-821

Za nakladnika
Ana Maletić

Urednik
Ivo Alfirević

Lektorica
Jasna Ažman

Likovna oprema
Gorjana Alfirević

Prijepis rukopisa
Marija Mandurić

Kompjutorski slog i prijelom
Franjo Matejiček

Tisak i uvez
Kastmiller, Zagreb

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i sveučilišna knjižnica - Zagreb

UDK 621.01(075.8) (076)
531.2(075.8) (076)

MATEJIČEK, Franjo

Uvod u statiku : sa zbirkom zadataka /
Franjo Matejiček, Damir Semenski, Zdravko
Vnućec. - 2. popravljeno i dopunjeno izd. -
Zagreb : Golden marketing - Tehnička
knjiga, 2005. - (Biblioteka Tehnička
mehanika ; knj. 1) (Udžbenici Sveučilišta
Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku -
Manualia Universitatis studiorum J. J.
Strossmayeris Ossekiensis) (Udžbenici
Sveučilišta u Zagrebu - Manualia
Universitatis studiorum Zagrablensis)

Bibliografija. - Kazalo.

ISBN 953-212-226-5

1. Semenski, Damir 2. Vnućec, Zdravko
I. Statika -- Udžbenik

450303119